

ICT Foundation

# 命題論理の基礎

# 論理学を学習する理由

---

- コンピュータ科学の基礎として
  - ・ コンピュータに使われている論理回路を理解するための基礎となります
  - ・ 今回は基礎的な論理回路を紹介する程度にとどめる
  - ・ プログラミングにも重要な概念
- 大学生の一般常識として
  - ・ 更に詳しく学習したい人は関連科目の履修をオススメします
- 色々なことに役に立つツールとして
  - ・ 入社試験に多く採用されているSPI (Synthetic Personality Inventory) では論理学の基礎的な問題が出題されている
  - ・ 検索エンジンを用いたWebの検索にも論理式の考え方方が応用できる

# 命題とは何か

---

- 真偽(真理値)が問題となりうるような肯定形の記述文(命令文や疑問文は除く)のこと
  - ・「鯨は哺乳類だ」 → 意味が明瞭なので○
  - ・「アリストテレスは偉い」 → 「偉い」が不明確なので×
- 命題の例
  - 私は学生である
  - 犬は四つ足である
  - 昨日学校は休講だった
  - × あなたは何歳ですか？
  - × 部屋を片付けなさい

# 単純命題と複合命題

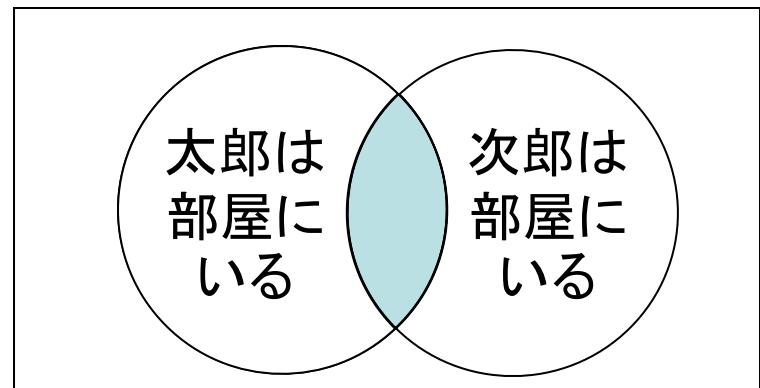
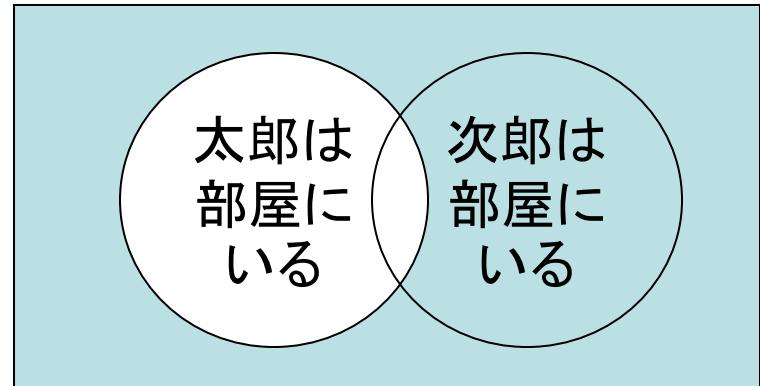
---

- **単純命題**
  - ・ 接続詞や否定詞を含まない肯定形の命題
  - ・ 例: 私は学生である
- **複合命題**
  - ・ 接続詞(かつ, または, ならば, と等しい)や否定詞(でない)を含む命題
  - ・ 例: 太郎は部屋にいる, かつ, 次郎も部屋にいる

※ 今回は「と等しい」は扱いません

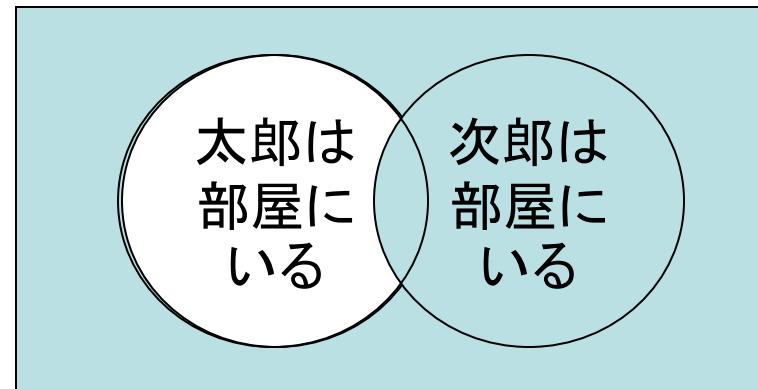
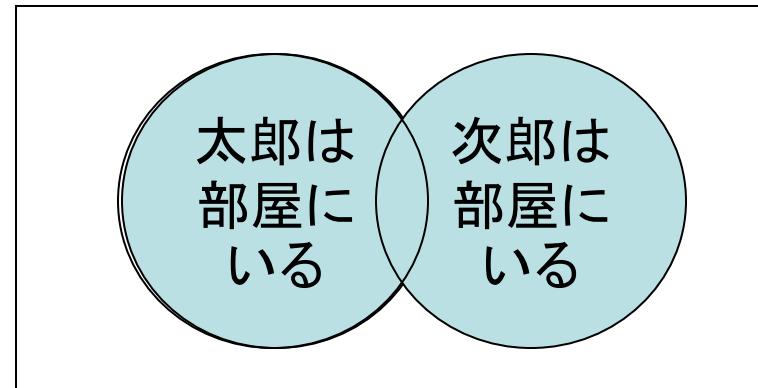
# 複合命題の例 1

- でない(否定)
  - ・ 例: 太郎は部屋にいない
- かつ(連言・論理積)
  - ・ 例: 太郎は部屋にいる, かつ, 次郎も部屋にいる



# 複合命題の例 2

- または(選言・論理和)
  - ・ 例: 太郎は部屋にいる,  
または, 次郎も部屋にいる
- ならば(仮言 かげん)
  - ・ 例: 太郎は部屋にいる,  
ならば, 次郎も部屋にいる



# 選言に関する補足

---

- ・「太郎は部屋にいる, または次郎は部屋にいる」⇒太郎, 次郎ともに部屋にいる場合, この複合命題は真となる(両立的選言)
- ・日本語には2種類の「または」の使い方があり, 命題論理では通常両立的選言を採用する
  - ・喫茶店のランチメニューに「コーヒーまたは紅茶」と記載されている場合, 両方注文することはできない(排他的選言)
  - ・「日本国のパスポートは, 日本国籍を持つ者または日本国籍を持つ者と結婚している者に発行される」の場合, 「日本国籍を持ち, かつ日本国籍を持つ者と結婚している場合でもパスポートは発行される(両立的選言)

# 仮言に関する補足

---

- 例えば、「明日が国民の祝日ならば、情報基礎の授業は休講である」という複合命題について、以下の4通りの組み合わせがありうる
  - (1) 明日は国民の祝日なので、授業が休講になる場合⇒真
  - (2) 明日は国民の祝日だが、授業が行われる場合⇒偽
  - (3) 明日は国民の祝日でないが、授業が休講になる場合⇒真
  - (4) 明日は国民の祝日でないが、授業が行われる場合⇒真
- 冒頭の複合命題は「明日が国民の祝日である場合」についてのみ「授業が休講である」と言明しており、「明日が国民の祝日でない場合」については何も言明していない
- このため、(3)(4)は真となる

# 真理値表

- 「太郎は部屋にいる, かつ, 次郎も部屋にいる」という複合命題について、真偽の組み合わせを表にまとめる

| 太郎は部屋にいる | 次郎は部屋にいる | 太郎は部屋にいる, かつ, 次郎も部屋にいる |
|----------|----------|------------------------|
| 真        | 真        | 真                      |
| 真        | 偽        | 偽                      |
| 偽        | 真        | 偽                      |
| 偽        | 偽        | 偽                      |

- (いちいち文章を書くのは大変なので)「太郎は部屋にいる」をP, 「次郎は部屋にいる」をQとし, 真を1, 偽を0で表す

| P | Q | PかつQ |
|---|---|------|
| 1 | 1 | 1    |
| 1 | 0 | 0    |
| 0 | 1 | 0    |
| 0 | 0 | 0    |

# 真理関数

---

- 複合命題の真偽はそれを構成する単純命題の真偽に応じて一通りに決まる

| P | Q | PかつQ |
|---|---|------|
| 1 | 1 | 1    |
| 1 | 0 | 0    |
| 0 | 1 | 0    |
| 0 | 0 | 0    |

- 複合命題の真偽は単純命題の真偽の関数になっている
- 真理値表は真理関数を表現している

# 基本的な真理関数のまとめ

---

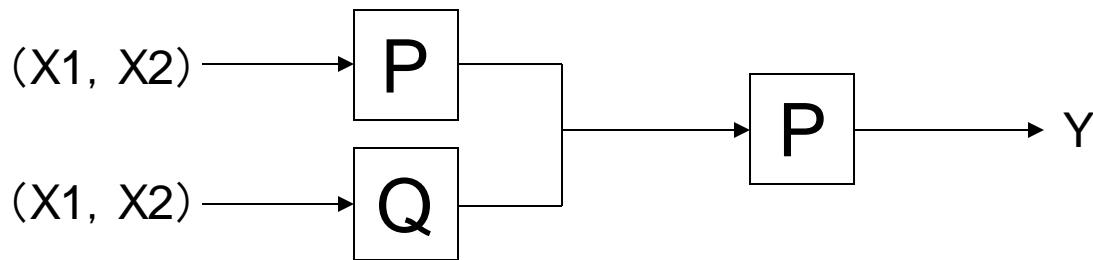
- 略号一覧(これ以外の記法もある)
  - 否定:  $\neg P$  ( $P$ ではない)
  - 連言・論理積(AND):  $P \wedge Q$  ( $P$ と $Q$ どちらも)
  - 選言・論理和(OR):  $P \vee Q$  ( $P$ と $Q$ どちらかが)
  - ならば(仮言):  $P \Rightarrow Q$  ( $P$ ならば $Q$ )

| P | Q | $\neg P$ | $P \wedge Q$ | $P \vee Q$ | $P \Rightarrow Q$ |
|---|---|----------|--------------|------------|-------------------|
| 1 | 1 | 0        | 1            | 1          | 1                 |
| 1 | 0 | 0        | 0            | 1          | 0                 |
| 0 | 1 | 1        | 0            | 1          | 1                 |
| 0 | 0 | 1        | 0            | 0          | 1                 |

# 【演習 1】

## 変換装置

- 0と1の入力を次の規則に基づいて変換し出力する装置PとQがある
  - P: 同時に入ってきた信号 $X_1$ と $X_2$ の少なくとも一方が1のとき1を出力し, 両方とも0のときは0を出力
  - Q: 同時に入ってきた信号 $X_1$ と $X_2$ の両方とも1のときのみ1を出力し, いずれかが0のときは0を出力する.
- 装置P, Qを以下のように繋いだ回路について考える.
  - ある $X_1$ と $X_2$ の値を, それぞれP, Qに入力した時, 入力値と出力値の正しい組み合わせはどれか(複数選択可)



a)  $(X_1, X_2, Y) = (1, 0, 1)$

b)  $(X_1, X_2, Y) = (1, 0, 0)$

c)  $(X_1, X_2, Y) = (0, 1, 1)$

d)  $(X_1, X_2, Y) = (0, 1, 0)$



# 検索エンジン

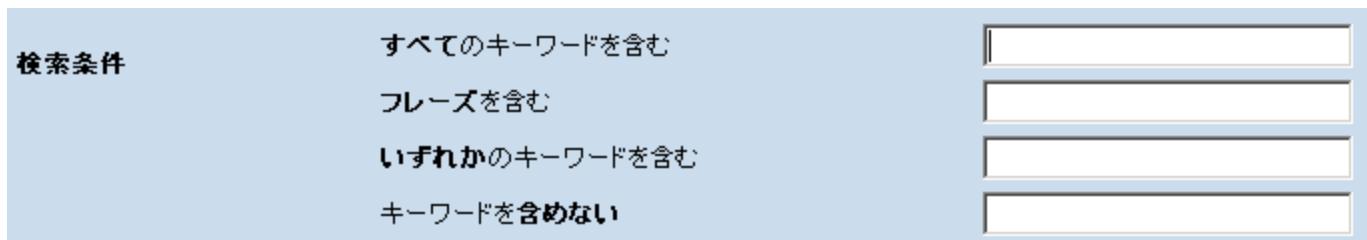
- Webページを検索するサービスを提供するシステムのこと
  - 全文検索型
    - キーワードを入力して検索する
    - キーワードを含むページを検索結果として表示する
    - 例: Googleではキーワードを入力して検索する
  - ディレクトリ型
    - キーワードごとにWebページを分類してある
    - 例: YahooではカテゴリからWebページを検索できる

| Yahoo!カテゴリ                 | サイトの登録                  |
|----------------------------|-------------------------|
| エンターテインメント                 | メディアとニュース               |
| 芸能人, 音楽, 映画, アニメ, 占い ...   | テレビ, ラジオ, 新聞, 雑誌 ...    |
| 趣味とスポーツ                    | ビジネスと経済                 |
| 車, スポーツ, 旅, アウトドア, ゲーム ... | ショッピング, B2B, 就用, 金融 ... |
| 芸術と人文                      | 各種資料と情報源                |
| 写真, デザイン, 演劇, 歴史, 文学 ...   | 図書館, 絵画, 電脳, 電話番号 ...   |
| 生活と文化                      | コンピュータとインターネット          |
| 住まい, 寝室, 環境, グルメ, 結婚 ...   | ホームページ, ハード, ソフト ...    |
| 教育                         | 政治                      |
| 大学, 小中高, 資格, 専門学校 ...      | 行政, 国会, 法, 税, 謙員 ...    |
| 健康と医学                      | 自然科学と技術                 |
| 病院, 症気, 薬, 栄養, ダイエット ...   | 生物, 地球, 天文, 工学, 化学 ...  |
| 社会科学                       | 地域情報                    |
| 言語, 経済学, 心理学, 社会学 ...      | 都道府県, 世界の国と地域 ...       |

# 論理式を用いた検索

---

- Google等の全文検索式の検索サービスでは、論理式を用いると効率のよい検索を行える
- Googleの検索条件フォーム
  - 検索に専用のフォームが用意されている場合もあるが、論理式で記述すると、簡単に書ける

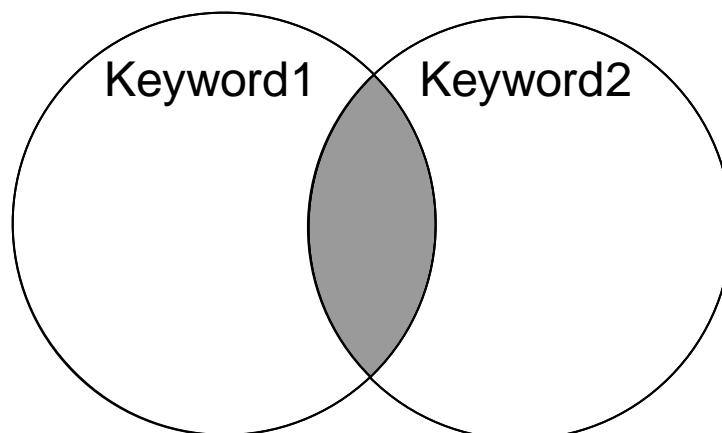


# 論理式を用いた検索 1

## AND検索

---

- AND検索
  - Keyword1 AND Keyword2 のように入力
    - 2つのキーワードがともに含まれるページが検索できる
  - 検索結果を絞り込むときには、キーワードをANDで追加
    - (通常はスペースでANDを表現できるので、OO △△と入力する)
  - 例: デジタル一眼 最安値 ソニー

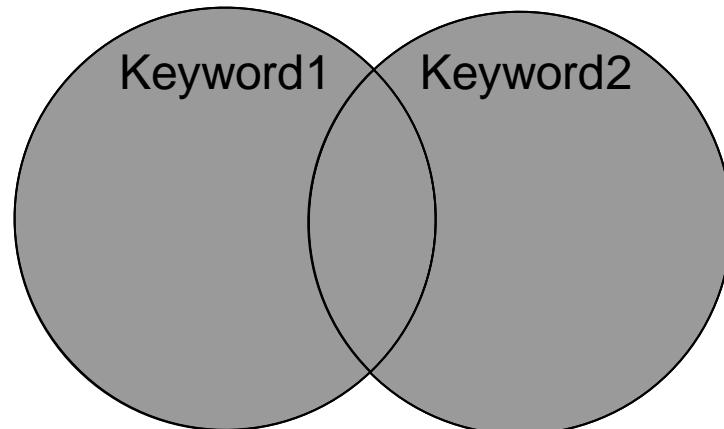


# 論理式を用いた検索 2

## OR検索

---

- OR検索
  - Keyword1 OR Keyword2 のように入力
    - 2つのキーワードのうち少なくともどちらかが含まれるページが検索できる
  - 例えば、1つのものに2つ以上の名前があり、その両方を網羅した検索を行いたい場合に利用する
  - 例：湘南藤沢キャンパス OR SFC

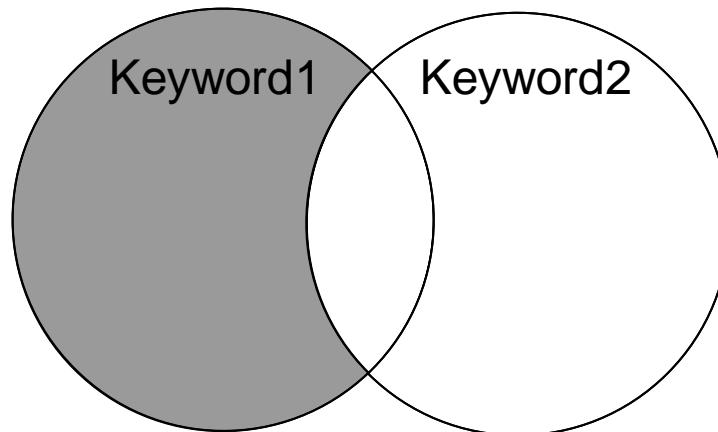


# 論理式を用いた検索 3

## NOT検索

---

- NOT検索
  - Keyword1 NOT Keyword2 のように入力
    - ○○を含むページの中から, △△が含まれるページを取り除いたページを検索できる
  - 正式には, Keyword1 AND NOT Keyword2と書くが, 通常ANDは省略される





# ICT Foundation

# SP1への応用

# SP|への応用

---

- Synthetic Personality Inventory
  - ・採用・人事の判断材料として幅広く企業が取り入れている検査
  - ・「能力検査と性格検査をあわせ持った、高度な個人の資質を総合的に把握する検査」のこと
  - ・能力検査と性格検査があり、能力検査に「命題」や「推理」についての出題がある

# 「ならば」における裏・逆・対偶

---

- もともとの命題:  $P \Rightarrow Q$
- 逆:  $Q \Rightarrow P$
- 裏:  $\neg P \Rightarrow \neg Q$
- 対偶:  $\neg Q \Rightarrow \neg P$ 
  - ※ もともとの命題が真のとき、対偶だけが常に真である
  - 例: 私がキャンパスにいるならば、キャンパスに人がいる

# 三段論法

---

- 前提1
  - ・  $P \Rightarrow Q$  「ソクラテスは人間だ」
- 前提2
  - ・  $Q \Rightarrow R$  「人間は皆死ぬ」
- 結論
  - ・  $P \Rightarrow R$  「ソクラテスは死ぬ」

# 【演習2】

## SPIの問題例1を解いてみよう

---

- 将棋が好きな人は、数学が得意であるという命題を真とするとき、次の内容が正しいものはどれか

- 将棋が好きでない人は、数学が苦手である
- 将棋が好きな人は、数学が好きである
- 数学が得意な人は、将棋が好きである
- 数学が苦手な人は、将棋が好きではない
- 将棋が好きな人は、囲碁が好きである

各選択肢は「将棋が好きな人は、数学が得意である」の「裏」・「逆」・「対偶」のどれにあたるか

# 【演習3】

## SPIの問題例2を解いてみよう

---

- 次のことがいえるとき、これらから確実に分かるのはどれか
  - ロマンチストは、詩人である
  - 星が好きな人は、小鳥や花が好きである
  - 花が好きな人は、ロマンチストである

- a) 小鳥が好きな人は、花が好きである
- b) 花が好きな人は、星が好きである
- c) 詩人は、花が好きである
- d) 小鳥が好きな人は、ロマンチストだ
- e) 星が好きな人は、詩人である

ヒント：三段論法の適用、対偶の変形も使う

# 【演習4】

## 正直者の囚人は誰か当ててみよう

---

- ある刑務所に必ず正直に答える者と、必ず嘘をつく者が居た
- 看守は正直者を選別し恩赦を与える為、囚人達に「誰が嘘つきで誰が正直者か名乗り出ろ」と問いただした
- すると、ある収容房の3人組は以下のように答えた

- Aの発言：
  - Bは嘘つきなのです。私は正直者ですから真実のみを伝えます
- Bの発言：
  - Cが嘘つきだ。私こそ正直者ですよ
- Cの発言：
  - AとBこそ嘘つきだよ。私？私は勿論正直者ですとも

- A, B, Cのそれぞれについて、正直者か嘘つきかどうかを答えよ

# 参考図書

---

- ・「論理学」野矢茂樹著, 東京大学出版会
- ・「論理学をつくる」戸田山和久著, 名古屋大学出版会
- ・「真理・証明・計算：論理と機械」内井惣七著, ミネルヴァ書房